Ponad 11 000 sprzedanych egzemplarzy książek z serii „Jak zdać maturę z matematyki”

JAK ZDAĆ MATURĘ Z MATEMATYKI?

NA POZIOMIE ROZSZERZONYM

dla bystrzaków i nie tylko!

PAKIET ON-LINE

516 zadań

w tym 044 zadania kodowane

matura nowa podstawa programowa

2015 2016 2017 2018

Dariusz Kulma

Nauczyciel Roku 2008

Tu znajdziesz odpowiedź →

DARIUSZ KULMA

JAK ZDAĆ MATURĘ Z MATEMATYKI NA POZIOMIE ROZSZERZONYM?

dla bystrzaków i nie tylko!

WYDAWNICTWO – ELITMAT

Mińsk Mazowiecki 2015

Autor: **Dariusz Kulma**

Konsultacje merytoryczne: **Witold Pająk**

Opracowanie redakcyjne: **Małgorzata Zakrzewska**

Korekta: **Tomasz Rycharski**

Projekt graficzny okładki: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Projekt graficzny i skład komputerowy: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Druk i oprawa:
Drukarnia Beltrani Sp. J.
ul. Śliwkowa 1
31-982 Kraków
tel. 012 262 91 43

W książce wykorzystano zadania udostępnione przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.

Fotografie z www.fotolia.com: © Syda Productions - id. 65327525; © ag visuell - id. 53584856; © Dreaming Andy - id. 62704436; © valdis torms - id. 46177828; © Marek - id. 68124775; © valdis torms - id. 66702797; © Denis Junker - id. 54171604; © Andrey_Arkusha - id. 74798374; © dengess - id. 42780077; © Lovrencg - id. 51595955; © kharlamova_lv - id. 47907680

Fotografie z www.pixabay.com: PublicDomainPictures - id. animal-1717_640; stux - id. origami-210114_1280; blickpixel - id. cube-570703_1920

Copyright by Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma

Wydanie: Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma

Mińsk Mazowiecki
tel. 51-77777-51
e-mail: elitmat@elitmat.pl , www.elitmat.pl

Mińsk Mazowiecki 2015. Wydanie drugie.

ISBN: 978-83-63975-13-5

Wszystkie książki wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.
Zamówienia prosimy składać przez stronę:

www.jakzdacmaturezmatematyki.pl

bądź na adres: elitmat@elitmat.pl

WSTĘP, który koniecznie musisz przeczytać, aby wiedzieć, co, jak, dlaczego, po co i kiedy

Drogi Maturzysto!

Pragnę Ci pogratulować. Cieszę się, że zamierzasz zdawać maturę z matematyki na poziomie rozszerzonym — z przedmiotu, który w obecnych czasach otwiera drzwi na najlepsze kierunki studiów. Ktoś może zapytać, dlaczego takie kierunki są najlepsze. Co roku „The Wall Street Journal" publikuje ranking zawodów. W pierwszej dziesiątce od wielu lat królują zawody i specjalności matematyczne lub wykorzystujące matematykę — matematyk, programista, aktuariusz (specjalista od oceny ryzyka ubezpieczeń), statystyk, analityk systemów komputerowych. W 2009 roku trzy pierwsze zawody w tym rankingu były związane z matematyką. Pamiętajmy, że to, co dzieje się w gospodarce i na rynku pracy w Stanach Zjednoczonych, za kilka lat będzie miało miejsce również w Polsce. W istocie już to obserwujemy — absolwenci kierunków technicznych nie mają z reguły problemów ze znalezieniem pracy. Rynek pracy zdecydowanie odwraca się od kierunków humanistycznych.

Książka, którą trzymasz w ręku, jest wynikiem wielu moich doświadczeń i obserwacji. Jak pewnie wiesz, matura z matematyki na poziomie rozszerzonym jest o wiele trudniejsza od tej z poziomu podstawowego. Abiturienci zauważają, że w odróżnieniu od matury na poziomie podstawowym nie ma na maturze rozszerzonej tak wielu „pewniaków". Często spotykam się z pytaniami: „Na jakie zadania postawić? Czego uczyć się w pierwszej kolejności? Co będzie na pewno?".

Może Cię zmartwię, ale na maturze rozszerzonej takich stuprocentowych pewniaków praktycznie nie ma, tym bardziej że od roku 2015 matura przygotowywana jest według nowej podstawy programowej. Jest jednak pewien kanon umiejętności, które mimo zmian podstawy programowej nadal będą pojawiały się w zadaniach maturalnych. Ta książka pomoże Ci opanować właśnie te najważniejsze umiejętności, byś mógł je skutecznie wykorzystać na maturze.

Jakie rodzaje zadań będą na maturze rozszerzonej?

Arkusz maturalny będzie składał się z zadań:

- zamkniętych, punktowanych w skali 0 – 1, w których jedną poprawną odpowiedź wybieramy z czterech podanych;
- otwartych krótkiej odpowiedzi, punktowanych w skali 0 – 2, 0 – 3, 0 – 4, wśród których mogą występować zadania z kodowaną odpowiedzią, czyli takie, na które odpowiedzi udziela się poprzez wpisanie żądanych cyfr w tabeli w zadanej kolejności (ocenie podlegają tylko wpisane cyfry). Wczytaj się uważnie, o które cyfry w zadaniu chodzi, i nie stosuj przybliżeń, chyba że podano inaczej.
- otwartych rozszerzonych, punktowanych w skali 0 – 5, 0 – 6, 0 – 7.

Łącznie na 180-minutowym egzaminie możesz zdobyć 50 punktów.

Czym ta książka różni się od innych?

Przede wszystkim tym, że „Jak zdać maturę z matematyki na poziomie rozszerzonym?" to specjalny system przygotowań, sprawdzający się na kursach i zajęciach, które prowadzę. To wynik 20 lat pracy i gromadzenia doświadczeń, obserwacji dokonanych na dziesiątkach tysięcy lekcji, jakie przeprowadziłem. Dzięki temu systemowi przygotowanie jest bardzo skuteczne. Każdego roku staram się go udoskonalać.

Książka składa się z 11 działów i zawiera 296 zadań omówionych krok po kroku. W każdym zadaniu zostały wyodrębnione poszczególne etapy i czynności, które musisz zrealizować, abyś mógł łatwiej przeprowadzać analizy. Zadania zostały ułożone parami. **Pierwsze (z numerem nieparzystym) jest zadaniem do analizy. Analizujesz to zadanie krok po kroku, obserwując, jak jest rozwiązywane. Drugie zadanie (z numerem parzystym) jest zadaniem sprawdzającym do samodzielnego wykonania.** Jest ono podobne do zadania pierwszego, nieraz jest prawie takie samo, a czasami tylko w jakimś stopniu do niego nawiązuje. Dzięki temu będziesz mógł samodzielnie wyćwiczyć nowe umiejętności i sprawdzić, czy już je opanowałeś. Na kolejnych stronach będziesz mógł prześledzić rozwiązanie tego zadania, aby się przekonać, czy wszystko rozumiesz i wykonujesz poprawnie. **W żadnej innej książce zadania nie są ułożone w taki sposób. Twoja praca będzie niezwykle efektywna, a zadania, które samodzielnie wykonasz, utwierdzą Cię w przekonaniu, że jesteś na właściwej drodze.**

Na początku każdego działu znajdziesz najważniejsze informacje i wzory. Wiele wzorów czy zagadnień rozszerza treści tablic matematycznych i warto z nich korzystać. Często pozwolą Ci w szybszy sposób rozwiązać zadanie. Nigdy nie omijaj tej części. Zawsze przeglądaj wzory i przypominaj je sobie; przy rozwiązywaniu określonego zadania zastanów się na przykład, które wzory już znasz, a których jeszcze nie wykorzystywałeś.

Nie wszystkie przedstawione tu zadania mogłyby znaleźć się na maturze, ale należało je uwzględnić, aby książka tworzyła spójną całość i byś mógł łatwiej zrozumieć dany materiał. Dlatego nie omijaj żadnych zadań. Wykonaj zarówno te, które wydają Ci się łatwe, jak i te, które sprawiają Ci trudność. **Wszystko możesz zrozumieć — bądź tylko konsekwentny w swoich przygotowaniach do matury.**

Ostatnim filarem systemu są powtórki poszczególnych zagadnień czy zadań w odpowiednich odstępach czasowych. Nawiązuje to do odkryć specjalistów z zakresu psychologii poznawczej, Hermanna Ebbinghausa i Tony'ego Buzana. Pierwszy z nich wskazał zależność zapominania materiału w czasie i konieczność odpowiedniej liczby powtórek, których powinno być 6 – 7, by dane zagadnienia pamiętać trwale. Tony Buzan zauważył, że powtórki te będą jeszcze skuteczniejsze, gdy zostaną przeprowadzone w określonym momencie. **W naszej książce pierwsza powtórka to zadanie sprawdzające. Kolejne pojawią się, gdy będziesz rozwiązywał zadania z podsumowań, które znajdują się na końcu każdego z działów.** Podsumowania składają się z dziesięciu zadań testowych, czterech kodowanych i sześciu zadań otwartych krótkiej lub rozszerzonej odpowiedzi. Łącznie jest to 220 zadań maturalnych, które sprawią, że będziesz miał coraz trwalej opanowane poznane umiejętności. Co ważne, w podsumowaniach tych znajdziesz zadania odnoszące się do wszystkich poprzednich działów — w podsumowaniu nr 1 będą zadania tylko z pierwszego działu, ale już w podsumowaniu nr 5 z poprzednich pięciu. **Dzięki temu cały czas będziesz pamiętał zadania, które powtarzałeś wcześniej — i tak do samej matury!** Przy poszczególnych zadaniach w podsumowaniach znajdziesz wskazówki. Najczęściej będzie to numer zadania podobnego, a czasem tylko informacja, gdzie szukać wskazówki. Na końcu książki znajdziesz odpowiedzi do wszystkich zadań, a nawet rozwiązania krok po kroku, gdy zadanie jest dowodem lub innym zadaniem na wykazywanie. W innych książkach, gdy spotykamy dowody, najczęściej nie ma odpowiedzi ani żadnego rozwiązania. W tej książce jest inaczej.

I jeszcze jedno! Nie bój się dowodów. Zadania tego typu uczą Cię uogólniać fakty matematyczne, są bardzo rozwijające i pobudzające Twoją kreatywność. Rozwiązuj jak najwięcej zadań tego typu.

Książka może być nie tylko dobrym przygotowaniem do matury, ale i świetną powtórką przed studiami lub w ich trakcie. W nowej podstawie programowej znajdziemy wiele zagadnień, które poprzednio były tylko na studiach, jak pochodne czy granice. Stąd wiadomości zawarte w tej książce mogą być swoistym pomostem pomiędzy szkołą średnią a studiami.

Życzę Ci pracowitości i wytrwałości, bo bez nich nie ma złotych środków w przygotowaniach. Dzięki nim Twój sukces pojawi się niepostrzeżenie. I to większy, niż myślisz!

UNIKALNY KOD DOSTĘPU

*W każdej książce znajduje się **unikalny kod uprawniający do skorzystania z pakietu on-line.***

*Wystarczy, że wpiszesz go na stronie i możesz **skorzystać ze specjalnego modułu podsumowań, który sprawdzi Twoje odpowiedzi i obliczy liczbę zdobytych punktów.***

Powodzenia!

Dariusz Kulma

KOD DOSTĘPU

Powyżej znajduje się Twój indywidualny kod zapewniający dostęp do PAKIETU ON-LINE w STREFIE MATURZYSTY. Wejdź do STREFY MATURZYSTY (poprzez kod QR lub wpisując adres www.jakzdacmaturezmatematyki.pl/strefa_maturzysty) korzystaj z dodatkowych pomocy on-line

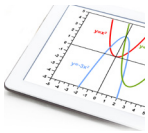
SPIS TREŚCI

1 LICZBY RZECZYWISTE

Wstęp teoretyczny – Potęgi i pierwiastki 7
Zadania do analizy i sprawdzające 8
Wstęp teoretyczny – Wykazywanie podzielności oraz spełniania przez liczbę lub wyrażenie określonych warunków 15
Zadania do analizy i sprawdzające 15
Wstęp teoretyczny – Logarytmy 25
Zadania do analizy i sprawdzające 25
Wstęp teoretyczny – Wartość bezwzględna, równania z jedną wartością bezwzględną, nierówności z jedną wartością bezwzględną 29
Zadania do analizy i sprawdzające 30
Podsumowanie 1 33

2 WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

Wstęp teoretyczny – Podstawowe wzory skróconego mnożenia, wzór Newtona i trójkąt Pascala, wykazywanie równań i nierówności 35
Zadania do analizy i sprawdzające 39
Wstęp teoretyczny – Twierdzenia dotyczące wielomianów – twierdzenie Bèzout, twierdzenie o pierwiastkach wymiernych, twierdzenie o reszcie 49
Zadania do analizy i sprawdzające 49
Podsumowanie 2 65



3 FUNKCJE

Wstęp teoretyczny – Definicja i ogólne własności funkcji, przekształcenia wykresu funkcji, funkcja liniowa, funkcja kwadratowa 67
Zadania do analizy i sprawdzające 70
Zadania optymalizacyjne z wykorzystaniem funkcji kwadratowej 73
Wstęp teoretyczny – Funkcja wykładnicza, funkcja logarytmiczna 78
Zadania do analizy i sprawdzające 79
Wstęp teoretyczny – Funkcja homograficzna 83
Zadania do analizy i sprawdzające 84
Podsumowanie 3 87

4 RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

Wstęp teoretyczny – Rodzaje równań kwadratowych 89
Zadania do analizy i sprawdzające 90
Równania i nierówności wielomianowe 90
Równania i nierówności z wartością bezwzględną 98
Wstęp teoretyczny – Równania z parametrem ze wzorami Viète'a 103
Zadania do analizy i sprawdzające 103
Podsumowanie 4 115

5 CIĄGI

Wstęp teoretyczny – Definicja ciągu, monotoniczność ciągu, najważniejsze wzory i własności dotyczące ciągu arytmetycznego i geometrycznego 117
Zadania do analizy i sprawdzające 118
Ciągi określone wzorem rekurencyjnym 121
Wstęp teoretyczny – Szereg geometryczny 133
Zadania do analizy i sprawdzające 133
Wstęp teoretyczny – Granice ciągów 135
Zadania do analizy i sprawdzające 135
Podsumowanie 5 141

6 TRYGONOMETRIA

Wstęp teoretyczny – Najważniejsze wzory i zależności dotyczące funkcji trygonometrycznych 143

Zadania do analizy i sprawdzające 145

Równania i nierówności trygonometryczne 155

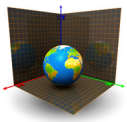
Podsumowanie 6 161

7 PLANIMETRIA

Wstęp teoretyczny – Najważniejsze wzory dotyczące figur geometrycznych, twierdzenia, cechy przystawania i podobieństwa trójkątów 163

Zadania do analizy i sprawdzające 167

Podsumowanie 7 185



8 GEOMETRIA KARTEZJAŃSKA

Wstęp teoretyczny – Równanie okręgu w postaci kanonicznej, długość i środek odcinka, równanie prostej, odległość punktu od prostej, zastosowanie wektorów, przekształcenia w układzie współrzędnych 187

Zadania do analizy i sprawdzające 189

Podsumowanie 8 207

9 STEREOMETRIA

Wstęp teoretyczny – Najważniejsze wzory dotyczące graniastosłupów, ostrosłupów, brył obrotowych 209

Zadania do analizy i sprawdzające 211

Podsumowanie 9 227

10 STATYSTYKA, PRAWDOPODOBIEŃSTWO I KOMBINATORYKA

Wstęp teoretyczny – Najważniejsze wzory i definicje dotyczące statystyki, kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa 229

Zadania do analizy i sprawdzające 231

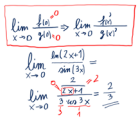
Wstęp teoretyczny – Prawdopodobieństwo warunkowe 245

Zadania do analizy i sprawdzające 245

Wstęp teoretyczny – Prawdopodobieństwo całkowite 251

Zadania do analizy i sprawdzające 251

Podsumowanie 10 257



11 RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

Wstęp teoretyczny – Granica funkcji 259

Zadania do analizy i sprawdzające 259

Wstęp teoretyczny – Definicja pochodnej funkcji w punkcie, równanie stycznej do wykresu funkcji, podstawowe wzory dotyczące pochodnych funkcji, zastosowanie rachunku pochodnych do wyznaczania przedziałów monotoniczności oraz ekstremów funkcji 263

Zadania do analizy i sprawdzające 265

Podsumowanie 11 279

Odpowiedzi do podsumowań 1-11 281

zadania do analizy ← Zadania rozwiązane krok po kroku, wraz z komentarzem objaśniającym poszczególne etapy rozwiązania

zadania sprawdzające ← Zadania podobne do zadań do analizy, do samodzielnego rozwiązania

ODPOWIEDZI ← Odpowiedzi do zadań sprawdzających, znajdujące się na kolejnych stronach

warto wiedzieć... ← Informacje przydatne do lepszego zrozumienia zagadnienia, a także rozwiązywania zadań

wskazówka, uwaga! ← Dodatkowe informacje przydatne do rozwiązania zadania

Podsumowanie ← Podsumowujące zadania testowe oraz zadania otwarte (w tym kodowane) obejmujące zagadnienia z działu, po którym się znajdują oraz poprzednich. Np. Podsumowanie 6 zawiera zadania z trygonometrii oraz zagadnienia z poprzednich pięciu działów. Każde podsumowanie ma swój indywidualny kod QR przekierowujący do wersji on-line

ZADANIE 57	zadanie do analizy	3 pkt	czerwiec 2014

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $x(x-1)+y(y-1) \geq xy-1$.

ROZWIĄZANIE

1° Opuszczamy nawiasy, a nastepnie przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę.

$$x(x-1)+y(y-1) \geq xy-1$$
$$x^2-x+y^2-y-xy+1 \geq 0$$

2° Mnożymy stronami przez 2.

$$x^2-x+y^2-y-xy+1 \geq 0 \quad \Big| \cdot 2$$

3° Rozkładamy wyrażenia tak, aby uzyskać trzy wzory skróconego mnożenia (kwadraty różnicy).

$$2x^2-2x+2y^2-2y-2xy+2 \geq 0$$
$$x^2+x^2-2x+y^2+y^2-2y-2xy+1+1 \geq 0$$
$$\underbrace{x^2-2x+1}_{(x-1)^2} + \underbrace{y^2-2y+1}_{(y-1)^2} + \underbrace{x^2-2xy+y^2}_{(x-y)^2} \geq 0$$
$$\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y-1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0} \geq 0$$

4° Suma wyrażeń nieujemnych jest również nieujemna, więc nierówność jest zawsze prawdziwa.

ZADANIE 58	zadanie sprawdzające	3 pkt	maj 2014

Udowodnij, że dla każdych dwóch liczb rzeczywistych dodatnich x i y prawdziwa jest nierówność $(x+1)\frac{x}{y}+(y+1)\frac{y}{x} > 2$.

ROZWIĄZANIE

UCZYSZ SIĘ TEGO, CO WYMAGANE I PRAWDOPODOBNE NA MATURZE

W książce znajdują się zarówno zadania autorskie, jak i zadania z matur i propozycji Centralnej Komisji Egzaminacyjnej, dzięki czemu uczysz się tego, co jest wymagane i najbardziej prawdopodobne na maturze.

DOWODY I ZADANIA NA WYKAZYWANIE

*W książce znajdziesz **wiele dowodów i zadań na wykazywanie**. Jest to ten typ zadań, który sprawia uczniom z reguły **najwięcej trudności**.*

Ucząc się jednak zgodnie ze wskazówkami, będziesz w stanie opanować rozwiązywanie nawet takich zadań, które zawsze wydawały Ci się zbyt trudne.

*Wszystkie zadania są dokładnie wytłumaczone, a dzięki kolejnym, podobnym zadaniom, które robisz samodzielnie, **utrwalasz sobie sposób rozwiązywania.***

ZADANIE 59	zadanie do analizy		

Wykaż, że jeśli x, y, z są liczbami dodatnimi, to $(x+y)(z+y)(x+z) \geq 8xyz$.

ROZWIĄZANIE

1° Korzystamy z zależności ze średnimi: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

2° Przedstawiamy każdą sumę $a+b$ w postaci $2 \cdot \frac{a+b}{2}$.

3° Uzyskaliśmy trzy średnie arytmetyczne. Każda z nich jest większa bądź równa od średniej geometrycznej tych liczb.

4° Porządkujemy wyrażenie, uzyskując prawą stronę nierówności.

$$L=(x+y)(z+y)(x+z)=2\cdot\underbrace{\frac{x+y}{2}}_{\geq\sqrt{xy}}\cdot 2\cdot\underbrace{\frac{z+y}{2}}_{\geq\sqrt{zy}}\cdot 2\cdot\underbrace{\frac{x+z}{2}}_{\geq\sqrt{xz}} \geq 2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{zy}\cdot 2\sqrt{xz} \geq 8\sqrt{x^2y^2z^2} \geq 8xyz = P$$

□

8 Geometria

NIEZBĘDNA TEORIA PRZEJRZYŚCIE WYJAŚNIONA

*Na początku każdego działu znajdziesz **niezbędną teorię, czyli najważniejsze wzory, twierdzenia i definicje.***

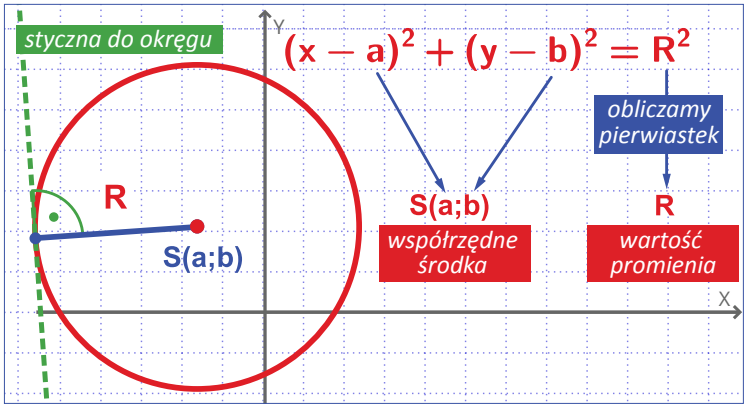
*Cała teoria oparta jest na konkretnych przykładach, pogrupowana, usystematyzowana i **ułożona tak, by jak najłatwiej było Ci ją zrozumieć i zapamiętać.***

Równanie okręgu w postaci kanonicznej

	PRZYKŁAD
Z równania okręgu w postaci kanonicznej w prosty sposób możemy odczytać współrzędne środka okręgu oraz jego promień.	Okrąg o równaniu $(x-3)^2+(y+5^2)=4$ ma środek w punkcie $S(3;-5)$ i promień długości $R=\sqrt{4}=2$.

Ciekawym przypadkiem jest **okrąg o środku w punkcie $(0;0)$**, czyli w początku układu współrzędnych. Wtedy wzór na równanie okręgu przyjmuje postać: $x^2+y^2=R^2$.

Styczna do okręgu to taka prosta, która ma z okręgiem dokładnie **jeden punkt wspólny**. Tworzy ona z promieniem okręgu **kąt prosty**.



Długość i środek odcinka, równanie prostej, odległość punktu od prostej

OBLICZANIE DŁUGOŚCI ODCINKA AB, GDZIE $A(x_A, y_A)$ I $B(x_B, y_B)$

WZÓR	PRZYKŁAD
$\lvert AB\rvert=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$	$A(2;-3)$ i $B(-4;5)$ $\lvert AB\rvert=\sqrt{(-4-2)^2+(5-(-3))^2}=\sqrt{(-6)^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$

RÓWNANIE PROSTEJ PRZECHODZĄCEJ PRZEZ DWA PUNKTY $A(x_A, y_A)$ I $B(x_B, y_B)$, $x_A \neq x_B$

WZÓR	PRZYKŁAD
$y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)$ gdzie: $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ a — współczynnik kierunkowy uwaga! Wzór ten w tablicach jest zapisany w innej, mniej użytecznej postaci.	Równanie prostej przechodzącej przez punkty $A(2;4)$ i $B(3;6)$ ma postać: $y-4=\frac{6-4}{3-2}(x-2)$ $y-4=2(x-2)$ $y-4=2x-4$ $y=2x-4+4$ $y=2x$

OBLICZANIE ŚRODKA ODCINKA AB, GDZIE $A(x_A, y_A)$ I $B(x_B, y_B)$

WZÓR	PRZYKŁAD
$S\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$	Jeżeli: $A(2;4)$ i $B(5;6)$, to współrzędne środka: $S\left(\frac{2+5}{2};\frac{4+6}{2}\right)=S\left(\frac{7}{2};\frac{10}{2}\right)=S(3{,}5;5)$

ODLEGŁOŚĆ PUNKTU $P(x_0, y_0)$ OD PROSTEJ $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 > 0$

WZÓR	PRZYKŁAD
$d = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + C \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$	Odległość punktu $P(1;3)$ od prostej $2x + y - 3 = 0$ wynosi: $d = \frac{\lvert 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - 3 \rvert}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{\lvert 2 \rvert}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Zastosowanie wektorów

OBLICZANIE WSPÓŁRZĘDNYCH WEKTORA O POCZĄTKU W PUNKCIE A I KOŃCU W PUNKCIE B

WZÓR	PRZYKŁad
$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A; y_B - y_A]$	Wektor $\overrightarrow{AB}$ między punktem $A(2;3)$ i punktem $B(-1;4)$ ma współrzędne: $\overrightarrow{AB} = [-1-2; 4-3] = [-3;1]$

POLE TRÓJKĄTA ZAWARTEGO MIĘDZY WEKTORAMI $\overrightarrow{AB}$ I $\overrightarrow{AC}$

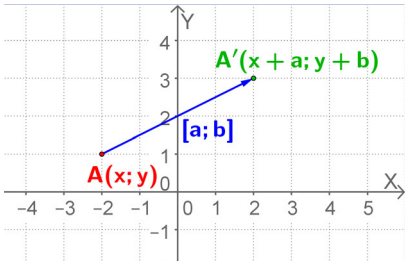
WZÓR	PRZYKŁad
Niech: $\overrightarrow{AB} = [a,b]$ i $\overrightarrow{AC} = [c,d]$ Wówczas: $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\lvert d(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \rvert$ gdzie: $d(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ więc $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left\lvert \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right\rvert$	Dane są punkty $A(1;3)$, $B(2;1)$, $C(3;2)$. Pole trójkąta ABC ma wartość: $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A] = [2-1, 1-3] = [1, -2]$ $\overrightarrow{AC} = [x_C - x_A, y_C - y_A] = [3-1, 2-3] = [2, -1]$ $P_{\triangle} = \frac{1}{2}\left\lvert \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right\rvert = \frac{1}{2}\lvert 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \rvert = \frac{1}{2}\lvert -1 + 4 \rvert = 1\frac{1}{2} j^2$

Przekształcenia w układzie współrzędnych

TRANSLACJA (PRZESUNIĘCIE RÓWNOLEGŁE O WEKTOR)

PRZESUNIĘCIE PUNKTU A O WEKTOR

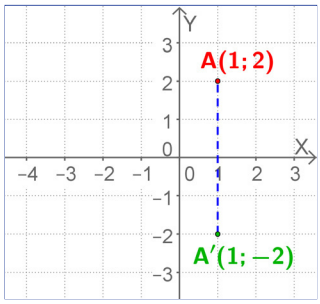
$T_{[a,b]}A(x;y) = A'(x+a; y+b)$



SYMETRIA OSIOWA

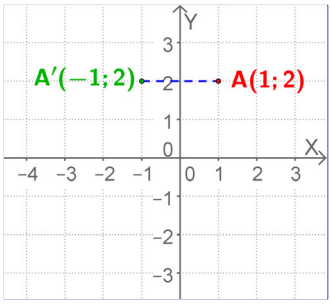
SYMETRIA WZGLĘDEM OSI OX

$S_{OX}A(x;y) = A'(x;-y)$



SYMETRIA WZGLĘDEM OSI OY

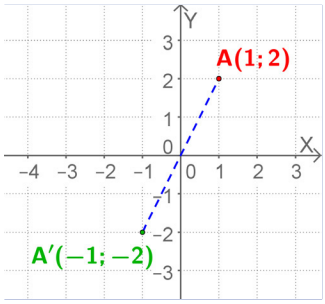
$S_{OY}A(x;y) = A'(-x;y)$



SYMETRIA ŚRODKOWA

SYMETRIA WZGLĘDEM POCZĄTKU UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

$S_{(0;0)}A(x;y) = A'(-x;-y)$



Prawdopodobieństwo całkowite

DEFINICJA

Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tworzą układ zupełny zdarzeń (tzn. niepuste, parami rozłączne zbiory, które w sumie dają cały zbiór Ω), czyli:

1° $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$

2° $B_i \cap B_j = \varnothing$ dla $i \neq j$ oraz $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

3° $P(B_1) > 0$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

to dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$ zachodzi wzór:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots$$

ŁATWE DO PRZYSWOJENIA PARTIE MATERIAŁU

*W każdym z działów wyodrębniliśmy **podstawowe zagadnienia, których można spodziewać się na maturze.***

POWTÓRKI W DWÓCH KROKACH

Aby zapamiętać sposób rozwiązywania określonego typu zadań, stosujemy zasadę dwóch kroków.

ZADANIE 273 zadanie do analizy

Dane są trzy urny. W pierwszej znajdują się kule z numerami od 1 do 10, w drugiej kule z numerami od 11 do 16, a w trzeciej od 17 do 30. Z losowo wybranej urny wybieramy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano kulę z numerem podzielnym przez 3.

ROZWIĄZANIE

1° Wykorzystamy w zadaniu twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

2° Wprowadzamy oznaczenia:

B_1 — wylosowano kulę z pierwszej urny,
B_2 — wylosowano kulę z drugiej urny,
B_3 — wylosowano kulę z trzeciej urny,
A — wylosowano kulę z numerem podzielnym przez 3.

KROK 1

W pierwszym zadaniu analizujesz sposób rozwiązania.

3° Zdarzenia B_1, B_2 i B_3 spełniają twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym, ponieważ:

3.1° $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$
3.2° $B_1 \cap B_2 = \varnothing, B_2 \cap B_3 = \varnothing, B_1 \cap B_3 = \varnothing$

3.3° $P(B_1) = \frac{1}{3} > 0$

$P(B_2) = \frac{1}{3} > 0$

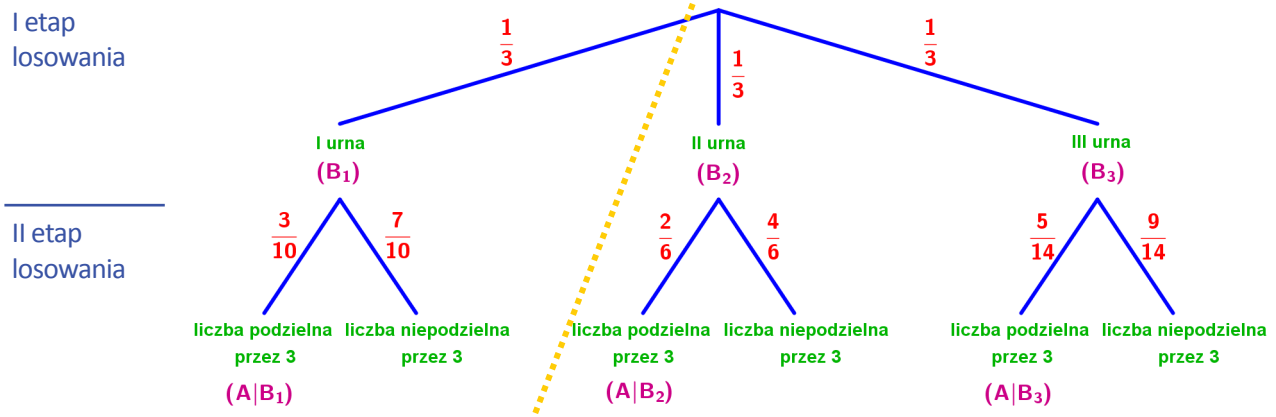
$P(B_3) = \frac{1}{3} > 0$

Prawdopodobieństwa $P(B_1)$, $P(B_2)$ i $P(B_3)$ są identyczne i wynoszą $\frac{1}{3}$, ponieważ z takim prawdopodobieństwem możemy wylosować jedną z trzech urn.

4° Zatem korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:
$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3)$, gdzie:

$A|B_1$ — wylosowanie kuli z numerem podzielnym przez 3 z urny pierwszej,
$A|B_2$ — wylosowanie kuli z numerem podzielnym przez 3 z urny drugiej,
$A|B_3$ — wylosowanie kuli z numerem podzielnym przez 3 z urny trzeciej.

5° Przedstawiamy za pomocą drzewa stochastycznego ilustrację graficzną etapów losowania.



czyli $P(A|B_1)=\frac{3}{10}$ $P(A|B_2)=\frac{2}{6}$ $P(A|B_3)=\frac{5}{14}$

6° Obliczamy prawdopodobieństwo całkowite.

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{14}=\frac{1}{10}+\frac{1}{9}+\frac{5}{42}=\frac{63+70+75}{630}=\frac{208}{630}=\frac{104}{315}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: $P(A)=\frac{104}{315}$

ZADANIE 274 zadanie sprawdzające

Urna pierwsza zawiera 4 kule białe i 6 czarnych, a urna druga 7 białych i 3 czarne. Rzucamy dwiema sześciennymi symetrycznymi kostkami do gry. Jeśli iloczyn wyrzuconych oczek będzie liczbą parzystą, to losujemy kulę z urny pierwszej. W przeciwnym wypadku z urny drugiej. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

ROZWIĄZANIE

KROK 2

Drugie zadanie, które jest bardzo podobne, rozwiązujesz samodzielnie, opierając się sposobie pokazanym wcześniej.

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ODPOWIEDZI DO WSZYSTKICH ZADAŃ WYJAŚNIONE „KROK PO KROKU"

Odpowiedzi do zadań sprawdzających, które rozwiązywałeś samodzielnie, znajdziesz kilka stron dalej.

ODPOWIEDŹ dO ZADANIA 274

ROZWIĄZANIE

1° W zadaniu wykorzystamy twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

2° Wprowadzamy oznaczenia:

B_1 — iloczyn oczek otrzymanych na obu kostkach jest liczbą parzystą,
B_2 — iloczyn oczek otrzymanych na obu kostkach jest liczbą nieparzystą,
A — wylosowano kulę białą.

3° Zdarzenia B_1 i B_2 spełniają twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym, ponieważ:

3.1° $B_1 \cup B_2 = \Omega$
3.2° $B_1 \cap B_2 = \varnothing$

3.3° Przy rzucie dwiema kostkami $\overline{\overline{\Omega}} = 6^2 = 36$. Iloczyn oczek będzie nieparzysty, gdy na obu kostkach wypadnie nieparzysta liczba oczek, czyli 1, 3 lub 5, więc $\overline{\overline{B_2}} = 3 \cdot 3 = 9$. W takim razie iloczynów parzystych będzie $\overline{\overline{B_1}} = 36 - 9 = 27$, więc:

$$P(B_1) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4} > 0$$

$$P(B_2) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} > 0$$

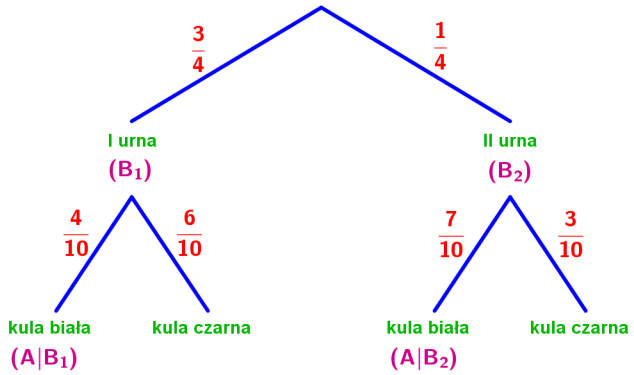
4° Wzór na prawdopodobieństwo całkowite w tym przypadku ma postać:
$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$, gdzie:

$A|B_1$ — wylosowanie kuli białej z urny pierwszej,
$A|B_2$ — wylosowanie kuli białej z urny drugiej.

5° Przedstawiamy za pomocą drzewa stochastycznego ilustrację graficzną etapów losowania.

I etap losowania

II etap losowania



czyli $P(A|B_1) = \frac{4}{10}$ $\quad P(A|B_2) = \frac{7}{10}$

6° Obliczamy prawdopodobieństwo całkowite.

$$P(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{10} = \frac{12+7}{40} = \frac{19}{40}$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: $P(A) = \frac{19}{40}$

10 Podsumowanie

http://jakzdacmaturezmatematyki.pl/podsumowania/10

Wykonaj samodzielnie poniższe zadania z poprzednich działów. Zrób to koniecznie. To najważniejszy element Twoich przygotowań. Zadania w podsumowaniu są dobrane tak, abyś utrwalił i zapamiętał to, czego nauczyłeś się wcześniej.

GOTOWE POWTÓRKI PO KAŻDYM DZIALE

Po każdym dziale znajduje się podsumowanie, w którym są zarówno ***zadania z danego działu, jak i wszystkich poprzednich,*** *dzięki czemu* ***systematycznie powtarzasz i utrwalasz swoją wiedzę.***

W przypadku problemów skorzystaj ze wskazówki.
zadania podobnego lub przydatne informacje, które pomogą Ci w rozwiązaniu.

WERSJA ON-LINE POLICZY TWOJE PUNKTY

Kod QR przeniesie Cię do ***wersji on-line podsumowania na stronie jakzdacmaturezmatematyki.pl,*** *gdzie będziesz mógł* ***sprawdzić uzyskany przez Ciebie wynik.***

dpowied

$W(x) =$

A. $x^5 - 1$

B. $x^5 + 1$

ZAD. P.10.2 (0-1) Z liter słowa *MATURA* można ułożyć z sensem lub bez sensu:

A. 720 słów B. 120 słów C. 600 słów D. 360 słów

zobacz inf. na s. 230

ZAD. P.10.3 (0-1) Pięć osób może wysiąść z autokaru na trzech przystankach na:

A. 5^3 sposobów B. 3^5 sposobów C. $\frac{5!}{2!}$ sposobów D. $5!$ sposobów

zobacz zad. 249

ZAD. P.10.4 (0-1) Prawdopodobieństwo, że przy losowaniu 4 kart z talii 52 kart wylosujemy co najmniej dwa króle i co najmniej jednego asa, wynosi:

A. $\frac{1108}{270725}$ B. $\frac{1056}{270725}$ C. $\frac{1092}{270725}$ D. $\frac{1108}{54145}$

zobacz zad. 263

ZAD. P.10.5 (0-1) Promień okręgu opisanego na trójkącie o bokach 10; 14; 16 wynosi:

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{6\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

zobacz inf. na s. 164

ZAD. P.10.6 (0-1) Rzucamy trzykrotnie sześcienną symetryczną kostką do gry. Prawdopodobieństwo, że iloczyn wyrzuconych oczek będzie nieparzysty, wynosi:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{8}$

zobacz zad. 254

ZAD. P.10.7 (0-1) Granica ciągu $a_n = \left(\frac{2n+1}{3n^2+4}\right)^4$ jest równa:

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{16}{81}$ C. 0 D. ∞

zobacz zad. 156

ZAD. P.10.8 (0-1) Długości boków trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny, a najkrótszy bok ma długość 3. Jeżeli największy kąt ma wartość 120°, to pole tego trójkąta wynosi:

A. $\frac{15}{4}$ B. $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{35\sqrt{3}}{4}$

zobacz zad. 208

ZAD. P.10.9 (0-1) Podstawa AB trójkąta ABC zawarta jest w prostej o równaniu $x - y + 3 = 0$ i ma długość $8\sqrt{2}$. Jeżeli wiadomo, że wierzchołek jest punktem $C(1; 10)$, to pole trójkąta ABC jest równe:

A. 24 B. 12 C. $24\sqrt{2}$ D. $12\sqrt{2}$

Wykorzystaj wzór na odległość punktu od prostej.

ZAD. P.10.10 (0-1) W sześcian o przekątnej $4\sqrt{6}$ wpisano walec. Pole powierzchni bocznej walca wynosi:

A. 32 B. 64π

W PRZYPADKU PROBLEMÓW - WSKAZÓWKI

Jeśli masz problem z rozwiązaniem któregoś z zadań, skorzystaj ze wskazówki, ***która wskaże Ci zadanie podobne lub potrzebny wzór.***

zobacz inf. na s. 210

Odpowiedzi do podsumowań 1-11

WSZYSTKO MOŻESZ SPRAWDZIĆ SAMODZIELNIE

Na końcu książki znajdziesz odpowiedzi do wszystkich zadań z podsumowań. W przypadku dowodów zamieściliśmy również pełne rozwiązania, żebyś mógł dokładnie przeanalizować sposób rozwiązania.

PODSUMOWANIE NR 1

P. 1.1 A P. 1.2 B P. 1.3 B P. 1.4 A P. 1.5

P. 1.11 | 2 | 5 | 6 | P. 1.12 | 3 | 1 | 2 | P. 1.13

P. 1.15 $123+123^2+123^3+124^4+\ldots+123^{17}-$

$=123(1+123)+123^3(1+123)+\ldots+123^{17}(1+123)=$

$=124(123+123^3+\ldots+123^{17})=\underbrace{124\cdot 123}_{15\,252}\cdot\underbrace{(1+123^2+\ldots+123^{16})}_{k\in\mathbb{C}}=15\,252k$

Wyrażenie jest więc podzielne przez 15 252.

P. 1.16 $\log_{125}49=\dfrac{\log_5 49}{\log_5 125}=\dfrac{\log_5 7^2}{3}=\dfrac{2\log_5 7}{3}=\dfrac{2p}{3}$

P. 1.17 $\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}=|\sqrt{2}+\sqrt{3}|+|\sqrt{2}-\sqrt{3}|=$

$=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}\notin\mathbb{C}$

P. 1.18 $2^n+2^{n+1}+2^{n+2}+2^{n+3}=2^n+2\cdot 2^n+2^2\cdot 2^n+2^3\cdot 2^n=2^n+2\cdot 2^n+4\cdot 2^n+8\cdot 2^n=$

$=15\cdot 2^n=15\cdot 2\cdot 2^{n-1}=30\cdot\underbrace{2^{n-1}}_{k\in\mathbb{C}}=30k$

Liczba jest więc podzielna przez 30.

P. 1.19 $4^1+4^2+4^3+\ldots+4^{60}=4(1+4+4^2)+4^4(1+4+4^2)+\ldots+4^{58}(1+4+4^2)=$

$=(1+4+16)(4+4^4+\ldots+4^{58})=21\cdot(4+4^4+\ldots+4^{58})=7\cdot\underbrace{3(4+4^4+\ldots+4^{58})}_{k\in\mathbb{C}}=7k$

Liczba jest więc podzielna przez 7.

P. 1.20 $k=77^4-5\cdot 77^2+4$

Niech $t=77^2$, więc

$k=t^2-5tt+4=(\ \ -1)(t-4)=(77^2-1)(77^2-4)=(77-1)(77+1)(77-2)(77+2)=$

$=76\cdot 78\cdot 75\cdot 79=4\cdot 19\cdot 2\cdot 39\cdot 75\cdot 79=4\cdot 2\cdot 75\cdot 19\cdot 39\cdot 79=600\cdot\underbrace{19\cdot 39\cdot 79}_{l\in\mathbb{C}}=600l$

Liczba jest więc podzielna przez 600.

PODSUMOWANIE NR 2

P. 2.1 D P. 2.2 C P. 2.3 C P. 2.4 B P. 2.5 C P. 2.6 B P. 2.7 C P. 2.8 A P. 2.9 D P. 2.10 D

P. 2.11 | 5 | 7 | 6 | P. 2.12. | 6 | 7 | 6 | P. 2.13. | 1 | 1 | 6 | P. 2.14. | 3 | 2 | 4 |

P. 2.15

$$a=\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots}}}\quad\Big|^3$$

$$a^3=6+\underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots}}}_{a}$$

$$a^3=6+a$$

$a^3-a-6=0$ Równanie to ma tylko jedno rozwiązanie: $a=2\in(\sqrt{2},\pi)$.

P. 2.16 $\begin{cases} m=-3\\ n=-4\end{cases}$

P. 2.17 $AAA+AA+A=100A+10A+A+10A+A+A=123A=41\cdot 3A$

Liczba jest więc podzielna przez 41.

P. 2.18 Warunki: $\begin{cases} W(-3)=0\\ W(-5)=-36\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=4\\ b=1\end{cases}$